Terminale Spécialité: Compléments sur la formule du binôme de Newton.

La formule de Newton est une formule mathématique donnée par Isaac Newton pour trouver le développement d'une puissance entière quelconque d'un binôme. Elle est aussi appelée formule du binôme de Newton, ou plus simplement formule du binôme.

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a^{n-k}.b^k$$

N.B.: Cette formule se démontre en particulier par récurrence. Si vous envisagez de faire des mathématiques après le Bac, je vous encourage à vous pencher sérieusement sur sa démonstration.

<u>Démonstration:</u>

Soient deux réels a *et* b *.*

Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$*, la proposition*

PP_n: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.a^{n-k}.b^k$ *est vraie.*

Initialisation*: pour n=0, il vient d'une part:* $(a+b)^0=1$

et d'autre part: $\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}.a^{0-k}.b^k=\underbrace{\binom{0}{0}.a^0.b^0}_{\text{somme d'un seul terme: k=0}}=\frac{0!}{0!\times 0!}\times1\times1=1\times1\times1=1$*, donc* P_0 *est vraie.*

Hérédité*: Soit* $n\in\mathbb{N}$ *pour lequel* P_n *soit vraie. Pour* $n+1$*, il vient:*

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n$$

$$\overset{H.R.}{=}(a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$=a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}$$

$$=\underbrace{\binom{n}{0}a^{n+1}\underbrace{b^0}_{1}}_{\text{terme d'indice k=0 du premier }\Sigma}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}+\underbrace{\binom{n}{n}\underbrace{a^{n-n}}_{a^0=1}b^{n+1}}_{\text{terle d'indice k=n du 2ème }\Sigma}$$

Voir la suite de ce calcul page suivante.

Or d'une part $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$, et d'autre part $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$

D'où $(a+b)^{n}$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^{k} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}}_{\text{on remplace l'indice k par p=k+1}} + b^{n+1}$$

$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^{k} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p-1} a^{n-(p-1)} b^{(p-1)+1} + b^{n+1}$, lorsque dans le 2° Σ, $k = 0$, alors $p = k+1 = 2$; lorsque $k = n - 1$, $p = n$. Et $k = p - 1$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^{k} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p-1} a^{n-p+1} b^{p-1+1} + b^{n+1}$$

$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^{k} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p-1} a^{n-p+1} b^{p} + b^{n+1}$, on ne change pas d'indice dans le 2° Σ, on se contente de noter à nouveau "k" notre indice "p"

$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^{k} + b^{n+1}$, les termes en bleu sont les mêmes, ainsi que les bornes des deux Σ, on peut donc factoriser:

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n-k+1} b^{k} + b^{n+1}$$

Voir la suite de ce calcul page suivante.

Or $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!}+\dfrac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}$

$$=\frac{n!}{(k-1)!\times k\times\left(n-k\right)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!\times k\times\left(n-k\right)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!\times(n-k+1)}$$

$$=\frac{n!\times(n-k+1)}{(k-1)!\times k\times\left(n-k\right)!\times(n-k+1)}+\frac{n!\times k}{(k-1)!(n-k)!\times(n-k+1)\times k}$$

$$=\frac{n!\times(n-k+1)+n!\times k}{\underbrace{(k-1)!\times k}_{k!}\times\underbrace{\left(n-k\right)!\times(n-k+1)}_{(n-k+1)!}}$$

$$=\frac{n!\times n\cancel{-n!\times k}+n!\times 1\cancel{+n!\times k}}{\underbrace{(k-1)!\times k}_{k!}\times\underbrace{\left(n-k\right)!\times(n-k+1)}_{(n-k+1)!}}$$

$$=\frac{n!\times(n+1)}{k!\times(n-k+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)!}{k!\times((n+1)-k)!}=\binom{n+1}{k}$$

D'où

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]a^{n-k+1}b^{k}+b^{n+1}$$

$$=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n-k+1}b^{k}+b^{n+1}$$

$$=\underbrace{\binom{n+1}{0}a^{n+1}b^{0}}_{\text{terme d'indice 0 du }\Sigma}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n-k+1}b^{k}+\underbrace{\binom{n+1}{n+1}a^{0}b^{n+1}}_{\text{terme d'indice n+1 du }\Sigma}$$

$=\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n-k+1}b^{k}$, donc P_{n+1} est vraie.